数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 254-257

Structure of positive self-similar solutions to semilinear heat equations with supercritical nonlinearity

神戸大・工　　内藤 雄基 (Yūki Naito)
Faculty of Engineering, Kobe University

優臨界的な非線形項をもつ半線形放物型方程式に対する Cauchy 問題について考える:

$$w_t = \Delta w + w^p \qquad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$w(x,0) = \ell |x|^{-2/(p-1)} \qquad \text{in } \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \tag{2_ℓ}$$

ここで、$N \geq 2, p > (N+2)/(N-2)$ とし、$\ell > 0$ はパラメータとする.

方程式 (1) は相似変換

$$w(x,t) \mapsto w_\lambda(x,t) = \lambda^{2/(p-1)} w(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0,$$

に関して不変である. この相似変換に対して不変な解、すなわち

$$w(x,t) \equiv \lambda^{2/(p-1)} w(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{for all } \lambda > 0 \tag{3}$$

である解を自己相似解 (self-similar solution) と呼ぶ. $w(x,t)$ を自己相似解とし $w(x,0) = A(|x|)$ とおくと $w(x,0) = w_\lambda(x,0)$ より

$$A(|x|) = \lambda^{2/(p-1)} A(|\lambda x|) \quad \text{for all } \lambda > 0.$$

ここで、$\lambda = 1/|x|$ とおくと $A(|x|) = A(1)|x|^{-2/(p-1)}$ となる. すなわち $(2)_\ell$ は、自己相似解が満たすべき初期条件であることがわかる.

Cauchy 問題 (1)-$(2)_\ell$ については Kozono-Yamazaki [5], Cazenave-Weissler [1] により、$\lambda > 0$ が十分小さい場合なにがしかのノルムで十分小さい解が一意に存在することが知られている. また、Galaktionov-Vazquez [3] は $\ell = L$ の場合の (1)-$(2)_\ell$ の解の存在および一意性について考察を行っている. ここで、

$$L = \left[\frac{2}{p-1}\left(N - 2 - \frac{2}{p-1}\right)\right]^{1/(p-1)}. \tag{4}$$

$U(x)=L|x|^{2/(p-1)}$ とおくと、U は、$p>N/(N-2)$ において

$$\Delta u+u^p=0 \qquad \text{in } \mathbf{R}^N\setminus\{0\}$$

の特異解であることに注意する. [3] では $\ell=L$ とするとき $N/(N-2)<p<p_c$ であれば (1)-(2)$_\ell$ は $t>0$ において $w(\cdot,t)\in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ となる自己相似解をもつこと、$p\geq p_c$ であれば解は $U=L|x|^{2/(p-1)}$ に限られることが示されている. ここで、p_c は次で定義される指数とする：

$$p_c=\begin{cases}\infty, & 3\leq N\leq 10,\\ 1+\dfrac{4}{N-4-2\sqrt{N-1}}, & N\geq 11.\end{cases} \tag{5}$$

さらに Galaktionov-Vazquez [3] は (1)-(2)$_\ell$ の自己相似解の存在およびその個数について次の予想を述べている：$p\geq p_c$ の場合、解は一意に存在する；$(N+2)/(N-2)<p<p_c$ の場合、$\ell>0$ が十分小さければ解は一意に存在し、$L-\ell>0$ が十分小さければ任意個数の有限個の解が存在する. とくに $\ell=L$ のとき無限個の解が存在する.

(3) において $\lambda=t^{-1/2}$ を代入すると自己相似解 w は

$$w(x,t)=t^{-1/(p-1)}u(x/\sqrt{t}) \tag{6}$$

と表されることがわかる. ここで、関数 u は次の楕円型偏微分方程式の解である：

$$\Delta u+\frac{1}{2}x\cdot\nabla u+\frac{1}{p-1}u+u^p=0 \qquad \text{in } \mathbf{R}^N.$$

とくに u が球対称解であるとき $u=u(r)$, $r=|x|$ は次を満たす：$u'(0)=0$,

$$u_{rr}+\left(\frac{N-1}{r}+\frac{r}{2}\right)u_r+\frac{1}{p-1}u+u^p=0, \qquad r>0. \tag{7}$$

さらに w が (2)$_\ell$ を満たすならば (6) より $u(r)$ は $\lim_{r\to\infty}r^{2/(p-1)}u(r)=\ell$ を満たすことがわかる. 逆に、$u=u(r)$ が (7) の解であり、

$$u'(0)=0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{r\to\infty}r^{2/(p-1)}u(r)=\ell \tag{8$_\ell$}$$

である場合、

$$w(x,t)=t^{-1/(p-1)}u(|x|/\sqrt{t}) \tag{9}$$

で与えられる w は (1)-(2)$_\ell$ の解となる.

次の初期条件を満たす (7) の解を考える：

$$u(0)=\alpha>0 \qquad \text{and} \qquad u'(0)=0, \tag{10$_\alpha$}$$

ここで、α はパラメータとする．初期値問題 (7)-$(10)_\alpha$ の解を u_α と記す．$\alpha > 0$ を変化させたときの解 u_α の挙動、とくに $u_\alpha(r)$ が $0 \le r < \infty$ で正であるかどうか、また正であるとき解がどれくらいのオーダーで減衰するか（多項式的に減衰するかあるいは指数関数的に減衰するか）といった問題については Haraux-Weissler [4], Peletier-Terman-Weissler [6], Yanagida [7], Dohmen-Hirose [2] 等により詳細に研究されている．とくに $p > (N+2)/(N-2)$ の場合については [4] により任意の $\alpha > 0$ に対して $[0,\infty)$ 上で $u_\alpha(r) > 0$ であること、ある定数 $\ell = \ell(\alpha) > 0$ が存在して

$$\lim_{r\to\infty} r^{2/(p-1)} u_\alpha(r) = \ell(\alpha)$$

を満たすこと、さらに $\ell(\alpha)$ は $\alpha > 0$ の関数として連続であることが知られている．

条件 $(8)_\ell$ を満たす (7) の正値解 $u \in C^2[0,\infty)$ 全体の集合を S_ℓ と表す．ここでは、$\alpha > 0$ を変化させたときの $\ell(\alpha)$ の挙動を考察することにより、S_ℓ の元の存在、非存在、および多重性について検討を行う．次が成立する：

定理 1. ある $\overline{\alpha} \in (0,\infty]$ が存在し、$\ell(\alpha)$ は、$\alpha \in (0,\overline{\alpha})$ において狭義単調増加であり $\alpha \to 0$ とするとき $\ell(\alpha) \to 0$ となる．また $\alpha \in (0,\overline{\alpha})$ に対して u_α は $S_{\ell(\alpha)}$ の最小解となる．さらに $\overline{\alpha} < \infty$ の場合、$S_{\ell(\overline{\alpha})} = \{u_{\overline{\alpha}}\}$ が成立する．すなわち $S_{\ell(\overline{\alpha})}$ は $u_{\overline{\alpha}}$ のみからなる．

定数 L および指数 p_c は、(4) および (5) でそれぞれ与えられるものとする．

定理 2. $p \ge p_c$ とする．このとき $\overline{\alpha} = \infty$, $\lim_{\alpha\to\infty} \ell(\alpha) = L$ が成立する．従って、$\ell \in (0,L)$ ならば S_ℓ は一意な元からなり、$\ell \ge L$ ならば S_ℓ は元をもたない．

定理 3. $(N+2)/(N-2) < p < p_c$ とする．このとき $\overline{\alpha} < \infty$, $\ell(\overline{\alpha}) > L$ が成立する．さらに、ある $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$,

$$\overline{\alpha} < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < \alpha_{k+1} < \cdots, \qquad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \infty,$$

が存在し、$k = 1,2,\ldots,$ に対して $\ell(\alpha_{2k-1}) < L$, $\ell(\alpha_{2k}) > L$ が成立する．とくに、ある $\{\ell_k\}_{k=1}^\infty$,

$$0 < \ell_1 \le \ell_3 \le \cdots \le \ell_{2k-1} \le \ell_{2k+2} \le \cdots < L,$$

$$\ell(\overline{\alpha}) = \ell_0 > \ell_2 \ge \ell_4 \ge \cdots \ge \ell_{2k} \ge \ell_{2k+2} \ge \cdots > L,$$

が存在し、$k = 1,2,\ldots,$ に対して $\ell \in [L, \ell_{2k-2})$ ならば S_ℓ は少なくとも $2k$ 個の元をもち、$\ell \in (\ell_{2k-1}, L]$ ならば S_ℓ は少なくとも $2k+1$ 個の元をもつ．とくに S_L は無限個の元からなる．

$u \in S_\ell$ に対して (9) で与えられる w が (1)-$(2)_\ell$ の球対称な自己相似解となることに注意することにより次の系を得る．

系. Cauchy 問題 (1)-$(2)_\ell$ に対して次が成立する：

(i) $p \geq p_c$ とする．このとき $\ell \in (0, L)$ ならば (1)-$(2)_\ell$ は球対称な自己相似解をただ一つもち、$\ell \geq L$ ならば (1)-$(2)_\ell$ は球対称な自己相似解をもたない．

(ii) $(N+2)/(N-2) < p < p_c$ とする．このときある $\{\ell_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$0 < \ell_1 \leq \ell_3 \leq \cdots \leq \ell_{2k-1} \leq \ell_{2k+2} \leq \cdots < L,$$

$$\ell(\overline{\alpha}) = \ell_0 > \ell_2 \geq \ell_4 \geq \cdots \geq \ell_{2k} \geq \ell_{2k+2} \geq \cdots > L,$$

が存在し、$k = 1, 2, \ldots$, に対して $\ell \in [L, \ell_{2k-2})$ ならば (1)-$(2)_\ell$ は少なくとも $2k$ 個の相異なる球対称自己相似解をもち、$\ell \in (\ell_{2k-1}, L]$ ならば (1)-$(2)_\ell$ は少なくとも $2k+1$ 個の相異なる球対称自己相似解をもつ．とくに $\ell = L$ はの場合、(1)-$(2)_\ell$ は無限個の相異なる球対称自己相似解をもつ．

REFERENCES

[1] T. Cazenave and F. B. Weissler, Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations, *Math. Z.* **228** (1998) 83-120.

[2] C. Dohmen and M. Hirose, Structure of positive radial solutions to the Haraux-Weissler equation, *Nonlinear Anal. TMA* **33** (1998) 51-69.

[3] V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997), 1-67.

[4] A. Haraux and F. B. Weissler, Non-uniqueness for a semilinear initial value problem, *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982), 167-189.

[5] H. Kozono and M. Yamazaki Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data, *Comm. Partial Differential Equations* **19** (1994), 959-1014.

[6] L. A. Peletier, D. Terman, and F. B. Weissler, On the equation $\Delta u + (x \cdot \nabla u)/2 + f(u) = 0$, *Arch. Rational. Mech. Anal.* **94** (1986) 83-99.

[7] E. Yanagida, Uniqueness of rapidly decaying solutions to the Haraux-Weissler equation, *J. Differential Equations* **127** (1996), 561-570.